Dans la vitrine du magasin de monsieur suite, on peut voir écrit : " du premier au 24 décembre 2006 votre prêt à 2,90 % pour faire vos cadeaux de Noël. ".
Exemple de prêt : si vous demandez 3 000 euros sur 12 mois, et après acceptation de votre demande, la mensualité sera de 253,89 € soit un taux effectif global fixe annuel de 2, 90 % hors assurance.
Le coût total du crédit sera de 46,68 €.

Dans ce chapitre, nous allons travailler sur des exemples de problèmes portant sur l'intérêt simple, l'intérêt composé, le taux équivalent …

E1 Activité d'approche : suite arithmétique.

N ° 1 Monsieur Suitaritm produit 200 chaises en 2001, puis il augmente sa production de 25 chaises par an.

On note u_n le nombre de chaises fabriquées la n-ième année.

1. Expliquer pourquoi la suite (u_n) est une suite arithmétique et préciser sa raison et son terme initial.
2. Calculer la somme $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6$.
3. Calculer le nombre $S = 6 \times \frac{u_1+u_6}{2}$. Que constatez vous ?

1 Suites arithmétiques.

Une suite est arithmétique lorsqu'on passe d'un terme à son suivant en ajoutant toujours un même nombre a appelé raison.

Pour tout entier naturel, on a $u_{n+1} = u_n + a$.

Soit a un nombre réel.

Une suite (u_n) est arithmétique de raison a lorsque pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = u_n + a$.

Le terme général d'une suite arithmétique de raison a et de premier terme u_0 est donné par la formule

$$\mathbf{u_n = u_0 + n\, a}$$

Le terme général d'une suite arithmétique de raison a et de premier terme u_1 est donné par la formule

$$\mathbf{u_n = u_1 + (n - 1)\, a}$$

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison a avec a > 0. Alors la suite (u_n) est une suite strictement croissante.

Autrement dit : pour tout entier n, $u_n < u_{n+1}$.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison a avec a < 0. Alors la suite (u_n) est une suite strictement décroissante.

Autrement dit : pour tout entier n, $u_n > u_{n+1}$.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison a avec a = 0. Alors la suite (u_n) est une suite constante.

Autrement dit : pour tout entier n, $u_n = u_{n+1}$.

Soit (u_n) une suite arithmétique.

Alors la somme des termes consécutifs de la suite (u_n) est donnée par les formules :

$$S = u_k + u_{k+1} + \ldots + u_p = (p - k + 1) \times \frac{u_k + u_p}{2}$$

$$S = (\text{nombre de termes de } S) \times \frac{(\text{premier terme de } S) + (\text{dernier terme de } S)}{2}$$

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}$$

$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

E2 Savoir travailler avec les suites arithmétiques.

N ° 2 Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -1$ et de raison $a = 3$.

1. Calculer u_5 et u_{15}.
2. Calculer la somme $u_5 + \ldots + u_{15}$.
3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

N ° 3

Soit (v_n) la suite arithmétique de premier terme $v_1 = 7$ et de raison $a = -0{,}2$.

1. Calculer v_{17}.
2. Calculer la somme $v_1 + \ldots + v_{17}$.
3. Déterminer le sens de variation de la suite (v_n).

N ° 4

Soit (w_n) la suite arithmétique de premier terme $w_0 = 0{,}5$ et dont $w_7 = 21{,}5$.

1. Calculer la raison de cette suite.
2. Calculer la somme $w_0 + \ldots + w_7$.
3. Déterminer le sens de variation de la suite (w_n).

N ° 5

Manuel verse 200 € sur un compte à l'ouverture de celui ci. Ensuite, il y verse 195 € le mois suivant puis, chaque mois, une somme diminuée de 5 € par rapport à celle versée le mois précédent.
On pose $u_0 = 200$ et on note u_n le n-ième versement effectué après ouverture.

1. Démontrer que la suite (u_n) est une suite arithmétique et préciser son premier terme et sa raison.
2. Cette suite est-elle croissante ?
3. Combien de versements Manuel fera-t-il ?
4. Combien aura-t-il épargné lorsqu'il aura effectué son dernier versement ?

E3 Activité d'approche : suite géométrique.

N ° 6 Le salaire de Michel augmente de 0,4 % chaque mois pendant 2 ans.
Le premier mois son salaire est égal à $u_0 = 1\,500$ €.
On note u_n le salaire perçu le n-ième mois.

1. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer la somme des 6 premiers salaires perçus par Michel.
4. Calculer $S = 1500 \times \dfrac{1-(1{,}04)^6}{1-1{,}04}$. Que constatez vous ?

2 Suites géométriques.

Une suite est géométrique lorsqu'on passe d'un terme à son suivant en multipliant toujours par un même nombre b appelé raison.

Pour tout entier naturel, on a $u_{n+1} = b \times u_n$.

Soit b un nombre réel.

Une suite (u_n) est géométrique de raison b lorsque pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = b \times u_n$.

Le terme général d'une suite géométrique de raison b et de premier terme u_0 est donné par la formule

$$\mathbf{u_n = u_0 \times b^n}$$

Le terme général d'une suite géométrique de raison b et de premier terme u_1 est donné par la formule

$$\mathbf{u_n = u_1 \times b^{n-1}}$$

Soit (u_n) une suite géométrique de raison b avec $0 < b < 1$.

Alors la suite (u_n) est une suite strictement décroissante. Autrement dit : pour tout entier n, $u_n > u_{n+1}$.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison b avec $b > 1$.

Alors la suite (u_n) est une suite strictement croissante. Autrement dit : pour tout entier n, $u_n < u_{n+1}$.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison b avec $b = 1$.

Alors la suite (u_n) est une suite constante. Autrement dit : pour tout entier n, $u_n = u_{n+1}$.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison b avec b différent de 1.

Alors la somme des termes consécutifs de la suite (u_n) est donnée par les formules :

$$S = u_k + u_{k+1} + \dots + u_p = u_k \times \frac{1-b^{\text{nombre de termes de S}}}{1-b}$$

$$S = (\text{ premier terme de S }) \times \frac{1-(\text{raison})^{\text{nombre de termes de S}}}{1-\text{raison}}$$

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \times \frac{1-b^n}{1-b}$$

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1-b^{n+1}}{1-b}$$

E4 Savoir travailler avec les suites géométriques.

N ° 7

Monsieur Suitegéo qui est propriétaire, loue un de ses appartements à partir du premier janvier 2000 pour 9 ans et pour un montant annuel de 6000 € en 2000 avec une augmentation annuelle de 2 %.
On note u_n le loyer annuel payé en 2000 + n.

1. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique et préciser sa raison et son terme initial.
2. Calculer le montant annuel du loyer en 2009. Quel sera le loyer mensuel ?
3. Cette suite est-elle croissante ?
4. Calculer le montant total des loyers versés pendant les 9 années.

N ° 8

Monsieur Suitegéo, au camping 3 étoiles, décide de louer un vélo. On lui propose de payer 7 € le premier jour puis de diminuer de 10 % le montant chaque jour suivant. On note v_n le montant payé le n-ième jour.

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique et préciser sa raison et son terme initial.
2. Calculer le montant payé le septième jour.
3. Cette suite est-elle croissante ?
4. Calculer le montant total payé par Monsieur Suitegéo pour une semaine de vacances.

E5 Activité d'approche : limite d'une suite géométrique.

N ° 9

Dans un pays imaginaire, on considère la ville Plus et la ville Moins ; ces deux villes avaient 10 000 habitants en 2000. Dans la ville Plus, la population augmente chaque année de 20 % et dans la ville Moins, la population diminue chaque année de 20 %. On note u_n le nombre d'habitants dans la ville Plus en 2000 + n
et v_n le nombre d'habitants dans la ville Moins en 2000 + n.

1. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique et préciser sa raison et son terme initial.
2. Cette suite est-elle croissante ?
3. Exprimer u_n en fonction de n et déterminer l'année au cours de laquelle la ville Plus aura doublée.
4. Déterminer l'année au cours de laquelle la ville Plus dépassera 1 000 000 d'habitants.
5. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique et préciser sa raison et son terme initial.
6. Cette suite est-elle croissante ?
7. Déterminer l'année au cours de laquelle la ville Moins aura diminué de moitié.
8. Déterminer l'année au cours de laquelle la ville Moins aura un nombre d'habitants inférieur à 10.

3 Limite d'une suite géométrique de raison positive de premier terme positif.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison positive et de premier terme positif.

Soit b un nombre réel strictement supérieur à 1.

Alors la suite (u_n) a pour limite + ∞. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exemple : soit la suite géométrique (u_n) de premier terme 1,5 et de raison b = 2. Voir feuille annexe.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison positive et de premier terme positif.

Soit b un nombre réel tel que 0 < b < 1.

Alors la suite (u_n) a pour limite 0. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exemple : soit la suite géométrique (u_n) de premier terme 4 et de raison b = 0,5. Voir feuille annexe.

E6 Savoir déterminer la limite d'une suite.

N ° 10

Soit la suite (u_n) géométrique de premier terme 0,0005 et de raison b = 1,1.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

N ° 11

Soit la suite (v_n) géométrique de premier terme 100 000 et de raison b = 0,9.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (v_n).
2. Déterminer la limite de la suite (v_n).

E7 Savoir déterminer le premier terme d'une suite qui franchit un seuil donné.

N ° 12

Soit la suite (u_n) géométrique de premier terme 5 et de raison b = 1,2.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. Déterminer le premier terme de la suite qui est supérieur à 200 000.

N ° 13

Soit la suite (v_n) géométrique de premier terme 2 et de raison b = 0,7.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. Déterminer le premier terme de la suite qui est inférieur à 3×10^{-6}.

N ° 14

Pour chaque question, une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer laquelle.

1. Soit (u_n) une suite géométrique de raison b = 3 et de premier terme u_1 = 0,2

   a) Il existe un terme de la suite (u_n) supérieur à 100.

   b) Il existe un terme de la suite (u_n) inférieur à 0,01.

   c) Il n'existe aucun terme de la suite (u_n) supérieur à 100.

2. Soit (v_n) une suite géométrique de raison b = 0,25 et de premier terme v_1 = 12,5.

   a) Il existe un terme de la suite (v_n) supérieur à 100.

   b) Il existe un terme de la suite (v_n) inférieur à 0,01.

   c) Il n'existe aucun terme de la suite (v_n) inférieur à 0,01.

E8 Comparaison de suites.

Quand on place un capital noté C à x % par an avec intérêts simples, cela signifie que chaque année, on reçoit le même intérêt cad $C \times \frac{x}{100}$. Les capitaux disponibles successifs sont alors des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $C \times \frac{x}{100}$. Ce type de placement est notamment celui des emprunts d'Etat.

Quand on place un capital par an avec intérêts composés de x % cela signifie que les intérêts d'une année s'ajoutent au capital et que l'année suivante, ils rapportent eux aussi des intérêts. Les capitaux disponibles sont alors des termes successifs d'une suite géométrique de raison 1 + x %. Ce type de placement est celui des livrets A de la Poste et de l'Ecureuil des livrets d'épargne populaire, des livrets jeunes, des plans d'épargne logement…

N ° 15 Comparaison de deux suites géométriques.

Monsieur Suitegéo place 2 500 € à intérêts composés au taux annuel de 6 %.
Sa femme place 3 000 € à intérêts composés au taux annuel de 4 %.
On pose $u_0 = 2500$ et on note u_n le capital de Monsieur Suitegéo au bout de n années de placement.
On pose $v_0 = 3000$ et on note v_n le capital de sa femme au bout de n années de placement.

1. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont deux suites géométriques.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Exprimer v_n en fonction de n.
4. Comparons les suites (u_n) et (v_n) à l'aide de la calculatrice.

a. Dans le menu table taper $2500 \times 1{,}06$ ^ X puis taper $3000 \times 1{,}04$ ^ X.
b. Ranger les nombres de 0 à 20 en prenant un pas de 1.
c. Afficher le tableau de valeurs.
d. A partir de combien d'années le capital de Monsieur Suitegéo sera-t-il supérieur à celui de sa femme ?
e. Dans le menu graph, faire tracer les deux courbes en prenant pour les ordonnées une valeur minimale de 2500, puis zoomer autour du point d'intersection pour vérifier votre résultat précédent.

5. Comparons les suites (u_n) et (v_n) avec un tableur.

a. Réaliser une feuille de calcul en précisant votre formule.
b. A partir de combien d'années le capital de Monsieur Suitegéo sera-t-il supérieur à celui de sa femme ?
c. Dans le menu graphique, faire tracer les deux courbes pour vérifier votre résultat précédent.

N ° 16 Comparaison d'une suite géométrique et d'une suite arithmétique.

Le but de ce problème est de déterminer le contrat d'embauche le plus intéressant.
Contrat A : le salaire mensuel est égal à 1 200 € au premier janvier 2002 et augmente chaque année de 70 € au premier janvier.
Contrat G : le salaire mensuel est égal à 1 000 € au premier janvier 2002 et augmente chaque année de 8 % au premier janvier.
Notons u_n le salaire mensuel avec le contrat A pendant l'année 2002 + n.
Notons v_n le salaire mensuel avec le contrat G pendant l'année 2002 + n.

1. Etude du contrat A.

a. Déterminer la nature de la suite (u_n), préciser son premier terme et sa raison.
b. Exprimer u_n en fonction de n.
c. Calculer le salaire en 2011.

2. Etude du contrat G.

a. Déterminer la nature de la suite (v_n), préciser son premier terme et sa raison.
b. Exprimer v_n en fonction de n.
c. Calculer le salaire en 2011.

3. Conclusion

a. A partir de quelle année le salaire mensuel du contrat G devient supérieur au salaire mensuel du contrat A ?
b. Déterminer en justifiant votre réponse, quel est le contrat d'embauche qui est le plus intéressant pour un employé ?