Exercice corrigé : triangle de Pascal – formule du binôme

1.Construisons le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 10$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

D'après le triangle $\boxed{\binom{8}{3} = 56}$ $\boxed{\binom{10}{4} = 210}$ et $\boxed{\binom{9}{5} = 126}$

2. Développons avec la formule du binome : $(3+x)^4$; $(1+x)^6$ et $(2-i)^4$

- $(3+x)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} \times 3^{4-k} \times x^k = 3^4 + 4\times 3^3 x + 6\times 3^2 x^2 + 4\times 3\times x^3 + x^4 = \boxed{x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81}$
- $(1+x)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} 1^{6-k} \times x^k = \boxed{x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1}$
- $(2-i)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} 2^{4-k} \times (\text{-i})^k = 2^4 + 4\times 2^3 \times (-i) + 6\times 2^2 \times (-i)^2 + 4\times 2^1 \times (-i)^3 + (-i)^4$

  $= 16 + 32(-i) + 24\times(-1) + 8\times i + 1 = \boxed{-7-24i}$

3. Montrons que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k = 5^n$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \times 4^k = (1+4)^n = 5^n}$$