Dans ce chapitre, nous allons aborder la notion d'intervalle que nous utilisons durant les trois années du lycée quelle que soit la section. Intervalle est un mot issu du latin intervallum qui signifie entre deux palissades.
En pratique, il est nécessaire de comparer des " choses " de même espèce, et donc de comparer les nombres qui les mesurent. Comparer des nombres, même lorsqu'ils ne sont pas attachés à une situation concrète, est une démarche essentielle en mathématique.

E1 Activité d'approche.

1) Tracer une droite graduée.
2) Marquer le point A d'abscisse 2 et le point B d'abscisse 5.
3) Recopier et compléter sur votre cahier d'exercices :
" Le segment [AB] est l'ensemble des points de la droite dont l'abscisse x vérifie …$\leq x \leq$ …."
4) Recopier sur votre cahier d'exercices : " Par analogie, l'ensemble des réels qui vérifient $2 \leq x \leq 5$ se note [2 ; 5]. On l'appelle intervalle [2 ; 5]. 2 et 5 sont les bornes de l'intervalle. " Citer trois réels de cet intervalle.
5) Marquer le point C d'abscisse -1 et le point D d'abscisse 7.
6) Refaire les questions 3 et 4 avec les points C et D.
7) Tracer une seconde droite graduée notée (x'x).
8) Marquer le point E d'abscisse 4.
9) Recopier et compléter sur votre cahier :
" La demi-droite [Ex) est l'ensemble des points de la droite dont l'abscisse x vérifie …………………."
10) Recopier sur votre cahier : " Par analogie, l'ensemble des réels qui vérifient $x \geq 4$ se note $[4 ; + \infty [$. "
Faire le même exercice avec F d'abscisse 2 et la demi-droite [Fx'). Citer trois réels de cet intervalle.

1 Intervalles.

Définitions :

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

L'intervalle fermé $[a ; b]$ est l'ensemble de tous les nombres x tels que $a \leq x \leq b$.

L'intervalle ouvert $\left] a ; b \right[$ est l'ensemble de tous les nombres x tels que $a < x < b$.

Exemples : voir feuille annexe.

Soit a un nombre réel.

L'intervalle $\left[a;+\infty\right[$ est l'ensemble de tous les nombres x tels que $a \leq x$.

L'intervalle $\left]-\infty; a\right[$ est l'ensemble de tous les nombres x tels que $x < a$.

Exemples : voir feuille annexe.

Remarques :

L'ensemble des réels positifs est noté $\mathbb{R}^{+}$.

L'ensemble des réels différents de 0 est noté $\mathbb{R}^{*}$.

E2 Connaître tous les types d'intervalles.

a) Voir feuille d'exercices.

b) Traduire en termes d'intervalles les inégalités suivantes :

$-2 \leq x \leq 3$
$0 < x \leq 2{,}5$
$-3 \leq x < 0$
$-5 < x < -3$
$x \leq -4$
$x < 0$
$x \geq 2{,}1$
$x > 7$

c) Traduire en termes d'inégalités l'appartenance aux intervalles suivants :

$x \in [-5 ; 2]$
$x \in]-1 ; 1{,}5]$
$x \in [-5 ; 7[$
$x \in]-1 ; 6[$
$x \in]-\infty ; \sqrt{2}]$
$x \in [0 ; +\infty[$
$x \in]-2 ; +\infty[$
$x \in]-\infty ; 3[$.

2 Intersection et réunion d'intervalles.

L'intersection de deux intervalles est l'ensemble des réels qui appartiennent à l'un **et** à l'autre des deux intervalles.

La réunion de deux intervalles est l'ensemble des réels qui appartiennent à l'un **ou** à l'autre des deux intervalles.

Exemples : déterminer l'intersection des intervalles [- 2 ; 3] et [1 ; 5]. Voir feuille annexe.
Déterminer la réunion des intervalles [- 2 ; 3] et [1 ; 5]. Voir feuille annexe.

E3 Savoir travailler avec des intervalles.

A) Déterminer $]-4 ; 5[\cap]3 ; 7[$.
B) Déterminer $]-4 ; 5] \cap]3 ; 7[$.
C) Déterminer $]-4 ; 5] \cap [3 ; 7[$.
D) Déterminer $]-4 ; 5[\cap]6 ; 7[$.
E) Déterminer $]-4 ; 5] \cap [5 ; 7[$.
F) Déterminer $]-4 ; 5[\cup]3 ; 7[$.
G) Déterminer $]-4 ; 5] \cup]6 ; 7[$.
H) Déterminer $]-4 ; 5] \cup [5 ; 7[$.
I) Déterminer $]-4 ; 5[\cup]5 ; 7[$.

3 Comparaison des nombres.

Comparer deux nombres a et b, c'est préciser si $a < b$ ou si $a > b$ ou si $a = b$.

Exemple : comparer $\sqrt{196}$ et 14. Voir feuille annexe. Puis comparer -12 et - 21. Voir feuille annexe.

Comparaison de deux nombres décimaux.

Si les nombres sont des décimaux positifs alors on compare leurs parties entières.

Si les parties entières sont égales, alors on compare leurs parties décimales.

Exemple : comparer 5,39 et 7,389. Voir feuille annexe. Puis comparer -5,12 et - 5,21. Voir feuille annexe.

Comparaison de fractions :

Deux fractions de même dénominateur sont rangées dans l'ordre de leurs numérateurs.

Deux fractions de même numérateur sont rangées dans l'ordre contraire de leurs dénominateurs.

Exemple : comparer $-\frac{5}{2}$ et $-\frac{7}{2}$. Voir feuille annexe.

comparer $\frac{3}{5}$ et $\frac{3}{7}$. Voir feuille annexe.

Comparaison des nombres à 0 ou à 1.

Si $a < 0$ et $b > 0$ alors $a < b$.

Si $a < 1$ et $b > 1$ alors $a < b$.

Exemple : comparer $-\frac{1}{2}$ et $\sqrt{2}$. Voir feuille annexe.

comparer $\frac{5}{4}$ et $\frac{3}{8}$. Voir feuille annexe.

Comparaison en étudiant le signe de la différence. (Cette méthode fonctionne dans tous les cas.)

Si $a - b < 0$ alors $a < b$.

Si $a - b > 0$ alors $a > b$.

Exemple : comparer $\frac{4}{5}$ et $\frac{5}{6}$. Voir feuille annexe.

E4 Savoir comparer deux nombres.

Dans chacun des cas, comparer les deux nombres donnés en choisissant un critère de comparaison adapté.

1) $a = 13{,}5$ et $b = 13{,}51$

2) $a = \frac{31}{18}$ et $b = \frac{53}{18}$

3) $a = \frac{35}{8}$ et b $\frac{27}{6}$

4) $a = \frac{n-2}{n+3}$ et $b = \frac{n-1}{n+3}$ avec $n \in \mathbb{N}$

5) $a = (x-5)^2$ et $b = 25 - 10x$

6) $a = \frac{121}{120}$ et $b = \frac{139}{140}$

7) $a = \frac{n-1}{n}$ et $b = 1 - \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}$

8) $a = \frac{n}{n+2}$ et $b = \frac{n}{n+4}$ avec $n \in \mathbb{N}$

9) $a = \frac{17}{19}$ et $b = -\frac{20}{21}$

4 Comparaison de a, a², a³ lorsque a est strictement positif.

Soit a un nombre réel strictement positif.

Si $a < 1$ alors $a^3 < a^2 < a < 1$.
Si $a = 1$ alors $a^3 = a^2 = a = 1$.
Si $a > 1$ alors $a^3 > a^2 > a > 1$.

Démonstration : voir feuille annexe.

E5 Savoir comparer les puissances d'un nombre. N ° 70 ; n ° 71 et n ° 72 p 56.

5 Des encadrements.

Théorème 1

Soient a, b et c trois réels. Si $a < b$ et $b < c$ alors $a < c$.

Démonstration : voir feuille annexe. Application : voir cours 4.

Théorème 2

Soient a, b, et c trois réels. Alors $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$.

En ajoutant un même réel aux deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de même sens.

Démonstration : voir feuille annexe. Application : résoudre l'inéquation $x + 3 \leq 5$.

Théorème 3

Soient a, b, c et d quatre réels. Si $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$.

Démonstration : voir feuille annexe. Application : encadrer $\sqrt{2} + \sqrt{7}$.

Théorème 4

Soient a, b et c trois réels. Si $c > 0$ alors $a < b \Leftrightarrow ac < bc$.

En multipliant les deux membres d'une inégalité par un nombre réel strictement positif,

on obtient une inégalité de même sens.

Démonstration : voir feuille annexe. Application : résoudre l'inéquation $5x > 4$.

Théorème 5

Soient a, b et c trois réels. Si $c < 0$ alors $a < b \Leftrightarrow ac > bc$.

En multipliant les deux membres d'une inégalité par un nombre réel strictement négatif,

on obtient une inégalité de sens contraire.

Démonstration : voir feuille annexe. Application : résoudre l'inéquation $-5x > 20$.

Théorème 6

Soient a, b, c et d quatre réels positifs. Si $a < b$ et $c < d$ alors $ac < bd$

En multipliant membre à membre deux inégalités de même sens dont tous les membres sont positifs

on obtient une inégalité de même sens.

Démonstration : voir feuille annexe. Application : encadrer $\sqrt{2} \times \sqrt{7}$.

E6 Savoir encadrer une expression.

N ° 53 ; n ° 54 ; n ° 56 ; et n ° 57 p 55.