Exemple d'une étude complète d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-2x^2 - 5x - 1}{x+3}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes ouvertes de son ensemble de définition et en déduire les éventuelles asymptotes à $\mathscr{C}_f$ parallèles aux axes.
3. Déterminer le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.
4. (a) Démontrer que la droite $\triangle$ d'équation $y = -2x + 1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$.
   (b) Etudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\triangle$.

Soit f la fonction définie par $\dfrac{-2x^2 - 5x - 1}{x+3}$.

1. **Déterminons l'ensemble de définition de f :**
   - $D_f = \{x \in \mathbb{R}\ /\ x + 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
2. **Déterminons ses limites aux bornes ouvertes de son ensemble de définition et déduisons-en les éventuelles asymptotes à $\mathscr{C}_f$ parallèles aux axes :**
   - Limites en l'infini :

   A l'infini , la limite d'une fraction rationnelle est celle du quotient de ses termes de plus haut degré .

   Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(-2x) = -\infty \quad .}$

   D'où $\mathscr{C}_f$ n'admet pas d'asymptote horizontale .

   Limite en -3 : $f(x) = (-2x^2 - 5x - 1) \times \dfrac{1}{x+3}$.

   $\lim\limits_{x\to-3} -2x^2 - 5x - 1 = -4 \quad (\star)$ et $\lim\limits_{x\to-3} x + 3 = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{1}{x+3} = \infty$.

   Or si $x < -3$ alors $x + 3 < 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} \dfrac{1}{3+x} = -\infty$ donc avec $(\star)$ $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} f(x) = +\infty}$.

   Et si $x > -3$ alors $x + 3 > 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}} \dfrac{1}{3+x} = +\infty$ donc avec $(\star)$ $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}} f(x) = -\infty}$.

   La doite d'équation $x = -3$ est donc asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.
3. **Déterminons le sens de variation de f :**
   - Dérivée de f

   f est une fonction rationnelle donc dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

   $\forall\, x \in D_f\ ,\ f'(x) = \dfrac{(-4x-5)(x+3) - (-2x^2 - 5x - 1)1}{(x+3)^2} = \dfrac{\dots}{(x+3)^2} = \dfrac{-2x^2 - 12x - 14}{(x+3)^2} = \dfrac{-2(x^2 + 6x + 7)}{(x+3)^2}$

   - Signe de f' et variation de f

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 7 = 0$ et $(3 + x)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 7 = 0$ et $x \neq 3$

   Posons $N(x) = x^2 + 6x + 7$

   Son discriminant est $\Delta = (6)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 8 > 0$ donc N admet deux racines $x_1 = \dfrac{-6 - \sqrt{8}}{2} = -3 - \sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{-6 + \sqrt{8}}{2} = -3 + \sqrt{2}$ et N est du signe de $a = 1$ donc positif à l'extérieur de ses racines .

   De plus, $(x + 3)^2$ est un carré donc positif sur $\mathbb{R}$.

   Et $-2 < 0$.

   D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_1		-3		x_2		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$		$-$	
$N(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(3+x)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

f est donc strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ -3-\sqrt{2}]$ et sur $[-3+\sqrt{2}\ ;\ +\infty[$ et est strictement croissante sur $[-3-\sqrt{2}\ ;\ -3[$ et sur $]-3\ ;\ -3+\sqrt{2}\ ]$.

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		x_1		-3		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	$+\infty$

4. (a) **Démontrons que la droite $\triangle$ d'équation $y=-2x+1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$:**

   $f(x)-(-2x+1)=\dfrac{-2x^2-5x-1}{x+3}-(-2x+1)=\dfrac{-2x^2-5x-1-(-2x+1)(x+3)}{x+3}=\dfrac{\dots}{x+3}=\dfrac{-4}{x+3}$

   $\lim\limits_{x\to\infty} x+3=\infty$ donc $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4}{x+3}=0$ cad $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-(-2x+1)=0$

   Donc $\triangle$ est bien asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$.

   (b) **Déterminons la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\triangle$:**

   $f(x)-(-2x+1)=\dfrac{-4}{x+3}$ donc $f(x)-(-2x+1)$ est du signe contraire de celui de $x+3$.

   Ainsi, sur $]-\infty\,;-3[$, $f(x)-(-2x+1)>0$ donc $f(x)>-2x+1$ donc $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\triangle$.

   Et sur $]-3;+\infty[$, $f(x)-(-2x+1)<0$ donc $f(x)<-2x+1$ donc $\mathscr{C}_f$ est strictement en-dessous de $\triangle$.

S'entraîner :

1. Pour chacune des fonctions rationnelles définies ci-dessous :

   $$f(x)=\frac{4x^2-36}{3-x}\quad;\quad g(x)=\frac{2x+1}{4-x^2}\quad;\quad h(x)=\frac{-12-x}{-x^2+x+12}$$

   – déterminer leur ensemble de définition
   – déterminer leurs limites aux bornes ouvertes de leur ensemble de définition
   – en déduire d'éventuelles asymptotes horizontales ou verticales
   – préciser leur domaine de dérivabilité puis calculer leur dérivée.
   – en déduire leur sens de variation
   – dresser leur tableau de variation
2. (a) Démontrer que la droite $\triangle$ d'équation $y=-4x+12$ est asymptote oblique à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f.

   (b) Déterminer la position de $\triangle$ par rapport à $\mathscr{C}_f$.
3. Vous pouvez traiter l'exo 3 du DM1 corrigé.
4. Vous pouvez traiter l'exo 3 du DM1 à faire pour la rentrée.