Droites et plans de l'espace
Correction de l'exercice 18

Partie A :

Soit [KL] un segment de l'espace; on note I son milieu. On appelle plan médiateur de $[KL]$ le plan perpendiculaire en I à la droite (KL).

Démontrons que le plan médiateur de $[KL]$ est l'ensemble des points de l'espace équidistants de K et L.:

- Soit M un point quelconque du plan médiateur de $[KL]$.
  I est le milieu du segment $[KL]$ donc (MI) est la médiane issue de M est le triangle KML.
  Or la droite (MI) est contenu dans le plan médiateur qui par définition orthogonal à la droite (KL) donc (MI) est orthogonale à (KM) et même perpendiculaire puisque I est commun aux deux droites.
  Ainsi dans le triangle KML la médiane(MI) est aussi médiatrice donc $MK = ML$.
  Ainsi tout point du plan médiateur de $[KL]$ est équidistant de K et L.
- Réciproque : Soit M un point équidistant de K et L cad $KM = ML$.
  Par conséquent, M appartient à la médiatrice de $[KL]$ dans le triangle KML. Ainsi (MI) est orthogonale à (KL) donc (MI) est incluse dans le plan perpendiculaire à (KL) et passant par I cad dans le plan médiateur de [KL].
  D'où M appartient au plan médiateur de $[KL]$.
  Ainsi tout point équidistant de K et L appartient au plan médiateur de $[KL]$.
  On a donc montré qu'un pt appartient au plan médiateur de $[KL]$ ssi il est équidistant de K et L.
- Conclusion : Le plan médiateur de $[KL]$ est l'ensemble des points de l'espace équidistants de K et L.

Partie B :

Ici l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; on considère les points $A(4\,;0\,;-3)$, $B(2\,;2\,;2)$, $C(3\,;-3\,;-1)$ et $D(0\,;0\,;-3)$.

1. Démontrons que le plan médiateur de $[AB]$ que l'on notera $\mathscr{P}$ a pour équation $4x-4y-10z-13=0$:

   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$. Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\5\end{pmatrix}$ donc le plan médiateur de $[AB]$ a une équation de la forme $-2x+2y+5z+d=0$, $d\in\mathbb{R}$

   Or, le point I milieu de $[AB]$ de coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\,;\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ cad $\left(3\,;1\,;-\frac{1}{2}\right)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ donc ses coordonnées vérifient son équation

   cad $-2\times3+2\times1+5\times\left(-\frac{1}{2}\right)+d=0$ d'où $d=\frac{13}{2}$

   Ainsi une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est $-2x+2y+5z+\frac{13}{2}=0$ ou encore (en multipliant l'égalité par -2) $4x-4y-10z-13=0$

On admet pour la suite que les plans médiateurs de $[BC]$ et $[CD]$ ont respectivement pour équations $2x-10y-6z-7=0$ et $3x-3y+2z-5=0$

2. Démontrons, en résolvant un système d'équations linéaires, que ces trois plans ont un unique point commun E dont on donnera les coordonnées.

Le point E est commun aux trois plans ssi ses coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ vérifient le système (S)

$$\begin{cases} 4x-4y-10z-13=0(L_1) \\ 2x-10y-6z-7=0(L_2) \\ -3x+3y-2z+5=0(L_3) \end{cases}.$$

3. Or $(S)\Leftrightarrow\begin{cases} (L_1) \\ 16y+2z+1=0(L_1-2L_2) \\ -38z-19=0(3L_1+4L_3) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} (L_1) \\ 16y+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1=0 \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 4x-4\times 0-10\times\left(-\frac{1}{2}\right)-13=0 \\ y=0 \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ainsi ces trois plans ont un unique point commun, le point E de coordonnées $\left(2\ ;0\ ;-\frac{1}{2}\right)$

4. En utilisant la partie A montrer que les points A, B, C et D sont sur une sphère de centre E. Quel est le rayon de cette sphère?

D'après la partie A : $E\in\mathscr{P}$ donc $EA = EB$; $E\in\mathscr{Q}$ donc $EB = EC$; $E\in\mathscr{R}$ donc $EC = ED$.

Ainsi $EA = EB = EC = ED$ donc les points A, B, C et D sont sur la sphère de centre E et de rayon

$$AE=\sqrt{(x_E-x_A)^2+(y_E-y_A)^2+(z_E-z_A)^2} = \sqrt{(-2)^2+0^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{41}{4}} = \frac{\sqrt{41}}{2}$$