Quand et comment utiliser le théorème des valeurs intermédiaires et ses corollaires ?

Qu'est ce que le théorème des valeurs intermédiaires et ses corollaires ?

Théorème des valeurs intermédiaires :

On considère une fonction f continue sur un intervalle I, a et b sont deux réels de I.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a\ ;\ b]$, alors quel que soit le réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$

Extensions :

On étend le dernier théorème aux cas où f est continue et strictement monotone sur un intervalle I ouvert ou semi-ouvert, borné ou non…

Quand utilise-t-on le théorème des valeurs intermédiaires (ou ses corollaires) ?

- Le T.V.I. s'utilise dans le cas où on demande de montrer qu'une équation du type $f(x) = k$ admet au moins une solution.
- Le TVI ne permet pas de déterminer le nombre de solutions, ni de calculer la ou les solutions.
- Le corollaire (ou extensions) du TVI s'utilise dans le cas ou on demande de montrer qu'une équation du type $f(x) = k$ admet une unique solution.
- Lorsqu'on demande de montrer qu'une équation du type $f(x) = k$ admet un nombre donné n de solution ($n \geqslant 2$), on peut utiliser le corollaire du TVI en découpant l'intervalle en n intervalles sur chacun desquels, on appliquera le théorème.

Comment utilise-t-on le TVI ou son corollaire ?

Pour utiliser le TVI, on doit s'assurer que les conditions suivantes sont bien réalisées :

+ La fonction f doit être continue sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$
+ le réel k doit être compris entre $f(a)$ et $f(b)$ càd $k \in [f(a)\ ;\ f(b)]$ lorsque f est strictement croissante et $k \in [f(b)\ ;\ f(a)]$ lorsque f est strictement décroissante.

Pour utiliser le corollaire du TVI, on doit s'assurer que les conditions suivantes sont bien réalisées :

+ La fonction f doit être continue sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$
+ La fonction f doit être strictement monotone sur $[a\ ;\ b]$ (càd soit strictement croissante soit strictement décroissante sur $[a\ ;\ b]$)
+ le réel k doit être compris entre $f(a)$ et $f(b)$ càd $k \in [f(a)\ ;\ f(b)]$ lorsque f est strictement croissante et $k \in [f(b)\ ;\ f(a)]$ lorsque f est strictement décroissante.

Cette méthode s'adapte aux extensions du corollaire.

Différents cas d'utilisation du TVI ou de ses corollaires :

Exemple 1 : On souhaite montrer que l'équation $\cos(2x) = 2\sin(x) - 2$ admet au moins une solution dans $\left[-\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

- Recherche : L'énoncé laisse supposer qu'il faut utiliser le TVI (on recherche au moins 1 solution).
- Pour pouvoir utiliser le TVI :
  - il faut essayer de se ramener à une équation de la forme $f(x) = k$.
    Or, $\cos(2x) = 2\sin(x) - 2 \Leftrightarrow \cos(2x) - 2\sin(x) = -2 \Leftrightarrow f(x) = -2$ avec $f(x) = \cos(2x) - 2\sin(x)$
  - La fonction f doit être continue sur $\left[-\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}\right]$. Or, les fonctions $x \mapsto \cos(2x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont continues sur $\left[-\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}\right]$ donc f est continue sur $\left[-\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}\right]$
  - -2 doit être compris entre $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
    Or $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - 2\times\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$
    et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 2\times 1 = -3$ donc $-2 \in \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) ; f\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$
- Conclusion : d'après le TVI, l'équation $f(x) = -2$ càd l'équation $\cos(2x) = 2\sin(x) - 2$ admet au moins une solution dans $\left[-\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}\right]$.
- Pour rédiger cet exercice, voir exercice du cours

Exemple 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+2}$
Montrer que f(x)=3 admet deux solutions sur $\mathbb{R}$.

Recherche : il s'agit de résoudre une équation du type $f(x) = k$, on peut donc penser qu'on va utiliser le TVI ou ses corollaires. Le fait que le nombre de solutions cherchées soit indiqué laisse supposer qu'on pourra utiliser un corollaire du TVI. Le fait qu'on cherche 2 solutions laisse penser qu'il faudra peut-être utiliser deux fois ce théorème.

Pour utiliser un corollaire du TVI, il faut que f soit continue et strictement monotone sur un intervalle I et que 3 appartienne à l'ensemble des valeurs prises par f sur I.
Il est donc nécessaire d'étudier dans un premier temps la fonction f.

$\forall x,\ x^2+2 > 0$ donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x,\ f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

Le dénominateur étant toujours positif, $f(x)$ est du signe de x donc :

$\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ si } x > 0 \\ f'(0) = 0 \\ f'(x) < 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$

.

- Plaçons nous sur $]-\infty ; 0]$, f est dérivable donc continue sur cet intervalle, elle est strictement décroissante sur cet intervalle.
  De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2} = \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ et $f(0) = \sqrt{2} < 3$ donc $3 \in \left[f(0) ; \lim\limits_{-\infty} f\right[$

Donc d'après un corollaire du TVI, on déduit que l'équation $f(x)=3$ admet une unique solution sur $]-\infty\,;\,0[$

- ❖ Sur $[0\,;\,+\infty[$, f est dérivable donc continue et f est strictement croissante.
  De plus, $f(0)=\sqrt{2}<3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2}=\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ donc $3\in\left[0\,;\,\lim\limits_{+\infty} f\right[$
  Donc d'après un corollaire du TVI, on déduit que l'équation $f(x)=3$ admet une unique solution sur $]-\infty\,;\,0[$
- ❖ finalement l'équation $f(x)=3$ admet deux solutions, une première sur $]-\infty\,;\,0]$ et une seconde sur $[0\,;\,+\infty[$