S'entrainer à l'Espace : Correction exercice 3

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$. Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $A(3\,;-2\,;2)$, $B(6\,;1\,;5)$ et $C(6\,;-2\,;-1)$.

Partie A

1. Montrons que ABC est un triangle rectangle.

$A(3\,;-2\,;2)$, $B(6\,;1\,;5)$ et $C(6\,;-2\,;-1)$ donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3\times3+3\times0+3\times(-3)=9-9=0$ donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ donc $\boxed{ABC \text{ est rectangle en } A}$.

2. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $x+y+z-3=0$. Montrons que $\mathcal{P}$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par A.

$\mathcal{P}$ a pour équation $x+y+z-3=0$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Or $\overrightarrow{AB}=3\vec{n}$ donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ donc $\mathcal{P}$ est orthogonal à (AB).

De plus, $x_A+y_A+z_A-3=3-2+2-3=0$ donc $A\in\mathcal{P}$.

Donc $\boxed{\mathcal{P} \text{ est le plan orthogonal à } (AB) \text{ passant par } A}$.

3. Soit $\mathcal{P}'$ le plan orthogonal à (AC) et passant par A. Déterminons une équation cartésienne de $\mathcal{P}'$.

$\mathcal{P}'$ est orthogonal à (AC) donc $\overrightarrow{AC}(3\,;0\,;-3)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}'$ donc $\mathcal{P}'$ admet une équation de la forme $3x+0y-3z+d'=0$ càd $x-z+d'=0$ avec $d'\in\mathbb{R}$.

Or $A\in\mathcal{P}'$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{P}'$ donc $3-2+d'=0$ càd $d'=-1$

D'où $\boxed{\text{une équation de } \mathcal{P}' \text{ est } x-z-1=0}$

4. Déterminons une représentation paramétrique de la droite Δ, intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ donc les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont orthogonaux donc sécants suivant une droite Δ.

$$M(x\,;y\,;z)\in\Delta \Leftrightarrow \begin{cases}x+y+z-3=0\\x-z-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=x-1\\y=-x-z+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=x-1\\y=-x-(x-1)+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=x-1\\y=-2x+4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}x=t\\y=-2t+4 \qquad t\in\mathbb{R}\\z=t-1\end{cases}}$$

<u>Remarque</u> : En choisissant d'exprimer x et y en fonction de z (ou x et z en fonction de y), on obtenait une autre représentation paramétrique de Δ.

Partie B

1. Soit D le point de coordonnées $(0\,;4\,;-1)$. Montrons que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).

$A(3\,;-2\,;2)$ et $D(0\,;4\,;-1)$ donc $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$. De plus, on sait que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=-3\times3+6\times3-3\times3=0$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=-3\times3+6\times0-3\times(-3)=0$

Donc $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC}$. Or $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires donc $\overrightarrow{AD}$ est un vecteur normal à (ABC)

D'où $\boxed{(AD) \text{ est orthogonale au plan } (ABC)}$.

2. Calculons le volume du tétraèdre $ABDC$.

Le volume du tétraèdre est : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$

avec $\mathcal{B}$ l'aire du triangle ABC et $h = AD$ la hauteur associée à la base ABC (puisque (AD) orthogonale à (ABC)).

Le repère étant orthonormal et le triangle ABC étant rectangle en A, $\mathcal{B} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{3\times 3^2} \times \sqrt{2\times 3^2}}{2} = \frac{9}{2}\sqrt{6}$ et

$h = AD = \sqrt{3^2+6^2+3^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

d'où $V = \frac{1}{3} \times \frac{9}{2} \times \sqrt{6} \times 3\sqrt{6} = 27$

Le volume du tétraèdre est 27 (unité de volume)

3. Montrons que l'angle géométrique $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\frac{\pi}{4}$ radians

Le repère est orthonormal et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix}$

donc $BD = \sqrt{(-6)^2+3^2+(-6)^2} = 9$, $CD = \sqrt{(-6)^2+6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ et $BC = \sqrt{(-3)^2+(-6)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

D'après la propriété d'Al Kashi, $BC^2 = CD^2 + DB^2 - 2CD \times BD \times \cos\widehat{BDC}$

Donc $\cos\widehat{BDC} = \frac{BC^2 - CD^2 - DB^2}{-2CD \times BD} = \frac{45-72-81}{-2\times 6\sqrt{2}\times 9} = \frac{108}{108\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d'où une mesure de $\widehat{BDC}$ est $\frac{\pi}{4}$.

4.

a. Calculons l'aire du triangle BDC.

L'aire du triangle BDC est $S = \frac{1}{2} \times DC \times DB \times \sin\widehat{BDC} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 9 \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 9 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 27$

L'aire de BDC , en unité d'aire, est 27.

b. Déduisons-en la distance du point A au plan (BCD).

Le volume du tétraèdre $ABDC$ est $V = \frac{1}{3} \times S \times h$ avec S l'aire de la base BCD est h la hauteur associée à cette base.

h est donc la distance de A au plan (BCD)

Or, on sait que $V = 27$ (unité de volume) d'après 2. et $S = 27$ (unité d'aire) d'après a.,

donc $h = \frac{3V}{S} = 3 \times \frac{27}{27} = 3$

Donc la distance de A au plan (BDC) est 3 (unité de longueur).