Correction du devoir surveillé n°2

Exercice 1 : 2 points

Soit f et g deux fonctions définies par $f(x)=2x^2+1$ et $g(x)=\frac{1}{x}$.

Déterminons l'image de x par f suivie de g cad $g[f(x)]$: $g[f(x)]=g(2x^2+1)=\frac{1}{2x^2+1}$

Exercice 2 : 6 points

1. $x=1+\frac{t}{100}$
2.
   (a) Julien a placé un capital de 1500€ à un taux annuel de $t\%$ donc le capital au bout de deux ans est : $1500\times x\times x$ cad $1500x^2$.
   (b) Julien a également placé un capital de 2000€ au même taux annuel $t\%$ pendant un an donc le capital correspondant à ce second placement est : $2000x$
   Le capital total est donc : $\boxed{1500x^2+2000x}$
3. On sait que le capital total est de $\boxed{3805{,}40€}$ donc x vérifie l'équation : $\boxed{1500x^2+2000x=3805{,}40}$
   Or $1500x^2+2000x=3805{,}40 \Leftrightarrow 1500x^2+2000x-3805{,}40=0 \Leftrightarrow 15x^2+20x-38{,}054=0$
   Ceci est une équation du second degré. Son discriminant est $\Delta=20^2-4\times15\times(-38{,}054)=2683{,}24>0$.
   Donc l'équation admet deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-20+\sqrt{2683{,}24}}{2\times15}=\frac{-20+51{,}8}{30}=\boxed{1{,}06}$ (qui est positif) et $x_2=\frac{-20-\sqrt{2683{,}24}}{2\times15}=\frac{-20-51{,}8}{30}=\boxed{-\frac{359}{150}}$. (qui est négatif)

Or $x=1+\frac{t}{100}>0$ et l'équation admet dans $\mathbb{R}^+$ une unique solution : $\boxed{x=1{,}06}$.

On a alors $x=1{,}06 \Leftrightarrow 1+\frac{t}{100}=1{,}06 \Leftrightarrow \frac{t}{100}=0{,}06 \Leftrightarrow t=6$. $\boxed{\text{Le taux annuel est de }6\%}$.

Exercice 3 : 3 points

Donner toutes les bonnes réponses (il peut y avoir plusieurs bonnes réponses pour la même situation)

1. La fonction trinôme P, représentée par la parabole ci-contre, est :
   (a), (b), (d), (e) sont vraies. (c) est fausse (car d'après le graphique, il a deux racines distinctes donc son discriminant est strictement positif donc il peut se factoriser…)
2. Soit P un trinôme tel que $a<0$ et $\Delta<0$. Sa parabole représentative est l'une de ces courbes ci-contre. Laquelle? **(d)**

Exercice 4 : 4.5 points

Dans l'entreprise MAT, le coût de fabrication d'un produit, en euros, est donné par :

$C(x)=-0{,}05x^2+10x+1000$ où x désigne la quantité de produit en kilogrammes.

Les recettes sont données, en euros, par $R(x)=59x$.

Pour quelle(s) quantité(s) a-t-on $R(x)>C(x)$?

$R(x)>C(x) \Leftrightarrow 59x>-0{,}05x^2+10x+1000 \Leftrightarrow 0{,}05x^2+49x-1000>0$.

Etudions le signe du trinôme $0{,}05x^2+49x-1000$:

Son discriminant est $\Delta=(49)^2-4\times(0{,}05)\times(-1000)=2401+200=2601>0$. Donc le trinôme a deux racines distinctes :

$x_1=\frac{-49+\sqrt{2601}}{2\times0{,}05}=\frac{-49+51}{0{,}1}=\boxed{20}$ et $x_2=\frac{-49-\sqrt{2601}}{2\times0{,}05}=\frac{-49-51}{0{,}1}=\boxed{-1000}$.

Or le trinôme est du signe de a=0,05 donc positif à l'extérieur des racines et nul en x_1 et x_2.

Par conséquent, $0{,}05x^2+49x-1000>0 \Leftrightarrow x<-1000$ ou $x>20$.

Or x est une quantité de produit en kilogrammes donc $x \geqslant 0$. On a donc $R(x) > C(x) \Leftrightarrow x > 20$
Cad $\boxed{\text{les recettes seront supérieures au coût dès que la quantité de produit sera supérieure à 20kg}}$.

Exercice 5 : $\boxed{\text{4.5 points}}$

Etudions dans $\mathbb{R}$ le signe du quotient $Q(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$

Etudions, tout d'abord le signe du trinôme x^2-2x-3 : son discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times(-3) = 4+12 = 16 > 0$.

Donc le trinôme admet deux racines distinctes $x_1 = \dfrac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times1} = \dfrac{2+4}{2} = \boxed{3}$ et $x_2 = \dfrac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times1} = \dfrac{2-4}{2} = \boxed{-1}$.

Donc le trinôme est du signe de $a=1$ donc positif à l'extérieur des racines.

Ainsi,

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		+	0	-	|	-	0	+	
$x-1$		-	|	-	0	+	|	+	
$Q(x)$		-	0	+	||	-	0	+	

A l'aide de ce tableau, on peut en déduire le signe de $Q(x)$: $\begin{cases} Q(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;-1[\cup]1\,;3[\\ Q(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1\,;1[\cup]3\,;+\infty[\\ Q(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1\,;3\} \end{cases}$