Cours 05 – Variations et extremums d'une fonction

I. Variations d'une fonction

1- Fonction croissante, fonction décroissante

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

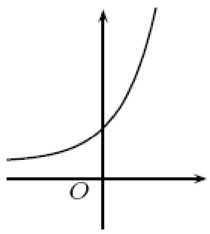
- Dire que f est croissante sur I signifie que les réels de cet intervalle et leurs images par f sont rangés dans le même ordre.
- Dire que f est décroissante sur I signifie que les réels de cet intervalle et leurs images par f sans rangés dans l'ordre contraire.

- La fonction f est strictement croissante sur I **si** pour tous réels x_1 et x_2 de I, vérifiant $x_1 < x_2$ **alors** $f(x_1) < f(x_2)$.
- La fonction f est strictement décroissante sur I **si** pour tous réels x_1 et x_2 de I, vérifiant $x_1 < x_2$ **alors** $f(x_1) > f(x_2)$.

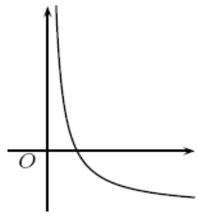
- La fonction f est croissante sur I **si** pour tous réels x_1 et x_2 de I, vérifiant $x_1 < x_2$ **alors** $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
- La fonction f est décroissante sur I **si** pour tous réels x_1 et x_2 de I, vérifiant $x_1 < x_2$ **alors** $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

2- Interprétation graphique

Cas d'une fonction croissante



Cas d'une fonction décroissante

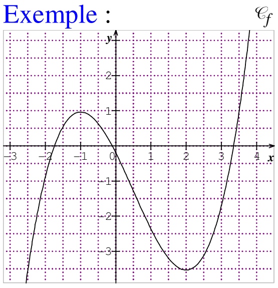


La courbe représentative d'une fonction croissante "*monte de la gauche vers la droite*" alors que celle d'une fonction décroissante "*descend de la gauche vers la droite*".

3- Tableau de variations

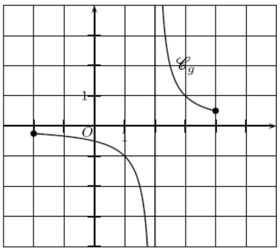
Etudier les variations ou le sens de variation d'une fonction, c'est déterminer les intervalles sur lesquels elle est strictement croissante, strictement décroissante. Ces résultats sont alors résumés dans un tableau de variation.

Exemple :



Le tableau de variations de la fonction dont la courbe représentative est donnée ci-contre est :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f		↗	1	↘	$-3{,}5$	↗	



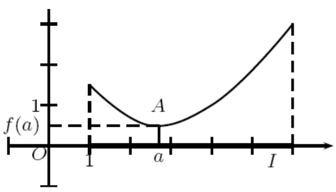
Remarque : La double barre signifie que la fonction n'est pas définie en 2

x	-2		2		4
g	-0.25	↘	‖	↘	0,5

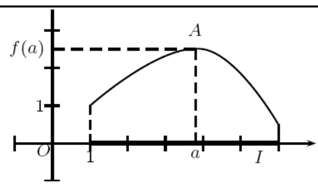
II. Extremums d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$.

Dire que $f(a)$ est le minimum de f sur I signifie que $f(a)$ est la plus petite valeur prise par la fonction sur I, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de point de $\mathscr{C}$ plus bas que le point $A(a\,;f(a))$.



Dire que $f(a)$ est le maximum de f sur I signifie que $f(a)$ est la plus grande valeur prise par la fonction sur I, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de point de $\mathscr{C}$ plus haut que le point $A(a\,;f(a))$



III. Construction de la courbe représentative d'une fonction

L'objectif est de représenter graphiquement la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$ dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ dont l'unité graphique est 1cm pour une unité sur chaque axe.

Remarque : Malgré tout le soin qu'on apportera au tracé, il ne s'agira toujours que d'un tracé approximatif.

1- Montrer que f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$.

2- En admettant que f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, donner alors son tableau de variation :

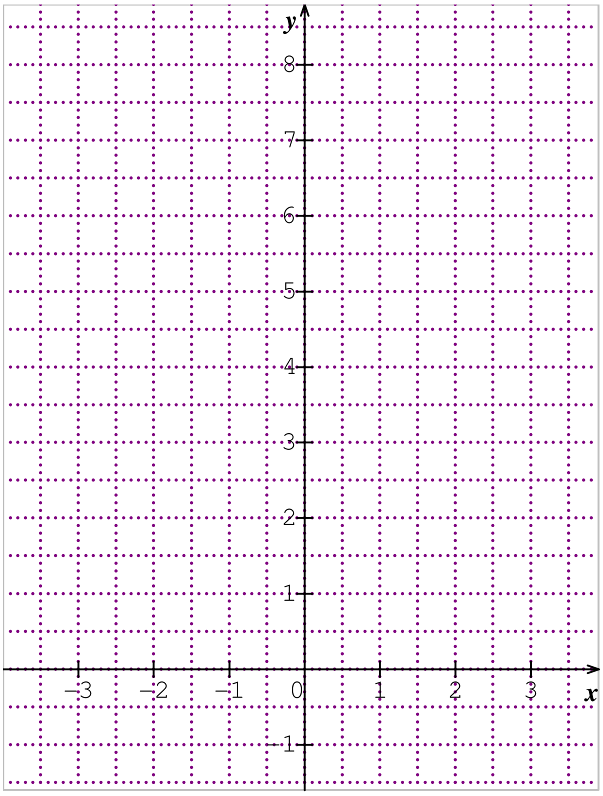
3- Pour construire la courbe représentative de f, on doit calculer les coordonnées d'un certain nombre de points de $\mathscr{C}_f$.
Or, $M(x_M\ ;\ y_M)$ appartient à $\mathscr{C}_f$ si et seulement si $x_M \in \mathscr{D}_f$ et $y_M = f(x_M)$.
Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$													

Remarque : La calculatrice permet d'obtenir rapidement un tel tableau.
- Aller dans le menu TABLE, saisir la fonction puis taper $\boxed{\text{F3}}$ (c'est le menu RANG)
- Pour Strt, taper -3 pour indiquer la première valeur du tableau
- Pour End, taper 3 pour indiquer la dernière valeur du tableau
- Pour Ptch, taper 0,5 (les valeurs seront calculer de 0,5 en 0,5)

4- Placer, dans le repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ ci-contre, les points $M(x\ ;\ f(x))$ donnés par le tableau de valeurs puis tracer la courbe de telle sorte qu'elle ait l'allure attendue (donnée par le tableau de variation)

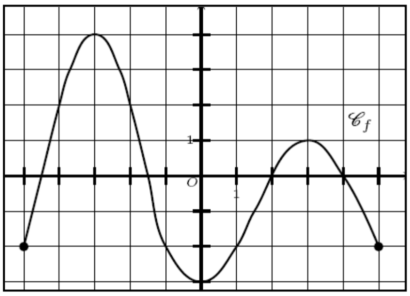
Remarque : La calculatrice permet de visualiser $\mathscr{C}_f$.
- Aller dans le menu GRAPH, saisir la fonction (elle est peut être déjà saisie)
- Pour régler la fenêtre d'affichage, taper $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{F3}}$ pour entrer dans le menu V-Window.
- Le tableau de valeurs permet de choisir :
  -4 et 4 pour Xmin et Xmax
  1 pour Scl ou Scale (c'est l'unité sur l'axe des abscisses)
  -1 et 9 pour Ymin et Ymax
  1 pour Scl ou Scale (c'est l'unité sur l'axe des ordonnées)



IV. Exercices

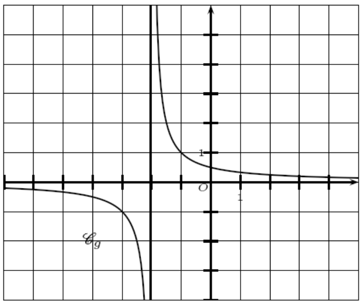
Exercice 1

On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction *f*.



1- Déterminer l'ensemble de définition de *f*.
2- Déterminer le sens de variation de *f*.
3- En utilisant le tableau de variation de *f* comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$ pour x_1 et x_2 deux réels de $[-5\,;\,-3]$ tels que $x_1 < x_2$.
4- Donner un encadrement de $f(x)$ pour $x \in [-2\,;\,0]$.

Exercice 2



On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction g.

1- Déterminer l'ensemble de définition de g.
2- Déterminer le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

Exercice 3

Soit *f* la fonction définie par $f(x) = 4 - 3x^2$.

1- Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de *f*.
2- a. Montrer que : $\forall x_1 \in \mathscr{D}_f,\ \forall x_2 \in \mathscr{D}_f,\ f(x_1) - f(x_2) = -3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$
b. Etudier alors le sens de variation de *f* sur $]-\infty\,;\,0]$ puis sur $[0\,;\,+\infty[$
3- Dresser le tableau de variation de *f*.

Exercice 4

Soit *f* la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3}{5+x}$.

1- Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de *f*.
2- a. Montrer que : $\forall x_1 \in \mathscr{D}_f,\ \forall x_2 \in \mathscr{D}_f,\ f(x_1) - f(x_2) = \dfrac{-3(x_1 - x_2)}{(5+x_1)(5+x_2)}$.
b. Etudier alors le sens de variation de *f* sur $]-\infty\,;\,-5[$ puis sur $]-5\,;\,+\infty[$.
3- Dresser alors le tableau de variation de *f*.

Exercice 5

L'étude des fonctions *f* et g a permis de construire les tableaux ci-dessous :

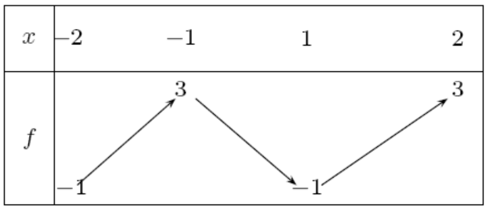
x	3		5		10
f	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1

x	-8		2		$+\infty$
g	-3	$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

1. Déterminer les ensembles de définition $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$ de *f* et de g.
2. Déterminer le sens de variation de *f* puis de g. Comparer alors $f(6)$ et $f(8)$.
3. Déterminer les éventuels extremums de *f* sur $\mathscr{D}_f$ et de g sur $\mathscr{D}_g$ et en quelles valeurs ils sont atteints.
4. Déterminer un encadrement de $f(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_f$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur [-2 ; 2] par $f(x) = x^3 - 3x + 1$ dont le tableau de variation est donné ci-contre.



1- Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

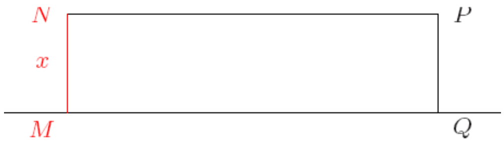
x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$									

2- Construire, sur du papier millimétré, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$. (unités : 3 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 1,5 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées)

3- Les points $A(0,6\ ; -0,6)$, $B(1,7\ ; 0,813)$, $C\left(\sqrt{2}\ ; -0,4\right)$ sont-ils situés sur $\mathscr{C}_f$?

Exercice 7

Le responsable d'un parc municipal, situé au bord d'une large rivière, veut aménager une aire de baignade surveillée de forme rectangulaire. Il dispose d'un cordon flottant de 160m de longueur et de deux bouées N et P. Il se demande à quelle distance de la rive il doit placer sa bouée N pour que l'aire de baignade soit maximale.



On pose $MN = x$ et on appelle $\mathscr{A}$ la fonction qui à x associe l'aire $\mathscr{A}(x)$ de la zone de baignade càd du rectangle $MNPQ$.

1- Démontrer que $NP = 160 - 2x$.

2- Quel est l'intervalle des valeurs possibles de x ?

3- a. Déterminer l'expression algébrique de $\mathscr{A}(x)$ en fonction de x.

b. Démontrer que $\mathscr{A}(x) = 3200 - 3(x-40)^2$.

4- a. Montrer que pour tout x_1 dans I et pour tout x_2 dans I, $\mathscr{A}(x_1) - \mathscr{A}(x_2) = -2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 80)$.

b. Montrer que $\mathscr{A}$ est croissante sur [0 ; 40] et décroissante sur [40 ; 80].

c. Dresser alors le tableau de variation de $\mathscr{A}$ sur I.

5- En déduire pour quelle valeur de x, l'aire de la zone de baignade est maximale et quelle est cette aire.

6- Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
$\mathscr{A}(x)$																	

7- Construire la courbe représentative de la fonction $\mathscr{A}$ dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$. (unités : 1cm pour 10m sur l'axe des abscisses et 1 cm pour $400m^2$ sur l'axe des ordonnées)

8- Retrouver graphiquement les résultats de la question 5.