Cours 04 – Vecteurs

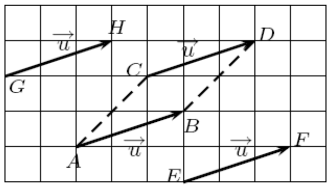
I. Définitions

1- Notions de direction et de sens :

- On dit que deux droites ont le même direction si et seulement si elles sont parallèles.
- Une direction étant donnée par une droite (AB), il y a deux sens possibles : de A vers B et de B vers A.

2- Caractérisation d'un vecteur

Soit deux points A et B et la translation qui transforme A en B. Si cette translation transforme aussi C en D, E en F, G en H…, on dit qu'il s'agit de la translation de vecteur $\vec{u}$. Ce vecteur peut alors être représenté par $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ ou encore $\overrightarrow{GH}$…



$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \ldots$

Des représentants de $\vec{u}$

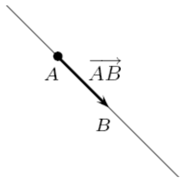
Un vecteur est caractérisé par sa direction, son sens et sa longueur.
La longueur du vecteur $\vec{u}$ s'appelle la norme de $\vec{u}$ et se note $\|\vec{u}\|$.

Remarques :

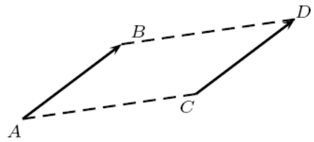
- un vecteur n'a pas d'origine déterminée : il peut prendre comme origine n'importe quel point du plan.
- Deux vecteurs ayant mêmes caractéristiques (direction, sens et norme) sont égaux.

Soit A et B deux points distincts du plan.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est parfaitement caractérisé par :
- Sa direction : celle de la droite (AB).
- Son sens : de A vers B.
- Sa norme égale à la longueur du segment $[AB]$: $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$

On dit que A est l'origine et B l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



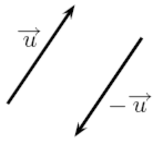
Propriété : Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si la quadrilatère $AB\underline{\mathbf{D}}C$ est un parallélogramme.



3- Vecteur nul, vecteurs opposés

Définitions :

- Par convention, tout vecteur ayant son origine et son extrémité confondues est appelé vecteur nul et est noté $\vec{0}$.
- On dit que deux vecteurs sont opposés lorsqu'ils ont la même direction, des sens contraires et même norme. L'opposé d'un vecteur $\vec{u}$ se note $-\vec{u}$.



Conséquences :

- Pour tout point A du plan $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont même direction, des sens contraires et même norme donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés, on a donc $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

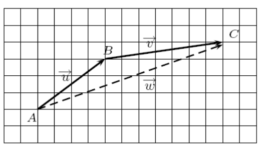
Remarques :

- Le vecteur nul est le sens vecteur qui n'a pas de direction (et donc pas de sens) et sa norme est nulle $\|\vec{0}\| = 0$
- $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B$

II. Somme et différence de deux vecteurs

1. Relation de Chasles

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ alors $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

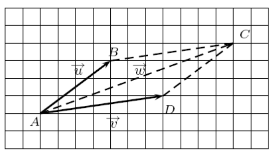


Relation de Chasles :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

2. Règle du parallélogramme

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. Alors $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ où C est le point tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.



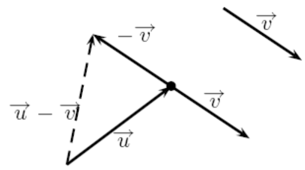
Règle du parallélogramme :

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

3. Différence de deux vecteurs

Définition :

La différence du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ s'obtient en ajoutant au vecteur $\vec{u}$ l'opposé du vecteur $\vec{v}$: $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)$



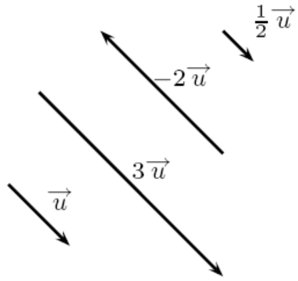
III. Produit d'un vecteur par un réel

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul.

Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur noté $k\vec{u}$ tel que

- $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont même direction.
- $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont même sens si $k>0$ et de sens contraire si $k<0$.
- $\|k\vec{u}\| = |k|\,\|\vec{u}\| = \begin{cases} k\|\vec{u}\| & \text{si } k>0 \\ -k\|\vec{u}\| & \text{si } k<0 \end{cases}$

Remarque : si $\vec{u}=\vec{0}$ ou si $k=0$ alors par convention $k\vec{u}=\vec{0}$



Règles de calculs (admises)

- $k\vec{u}=\vec{0} \Leftrightarrow k=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$
- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- $k\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=k\vec{u}+k\vec{v}$
- $k\left(k'\vec{u}\right)=k\times k'\vec{u}$
- $(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$

Exemples :

$3\overrightarrow{AM}=\vec{0}\Leftrightarrow$

$2\vec{u}+3\vec{u}=$

$3\vec{u}+3vect(v)=$

$-6\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=$

$-2\times\left(\frac{3}{2}\vec{u}\right) =$

Milieu d'un segment : (théorème)

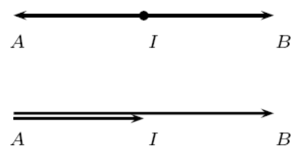
Soient A, B et I trois points du plan.

I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$

si et seulement si $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

si et seulement si $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{IB}$

si et seulement si $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



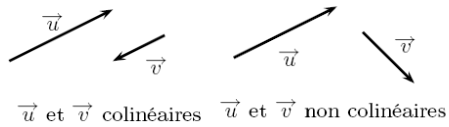
IV. Colinéarité de deux vecteurs

Définition de deux vecteurs colinéaires :

On dit que deux vecteurs non nuls sont colinéaires lorsque l'un est le produit de l'autre par un réel non nul. Autrement dit, deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k non nul tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.

Remarques:

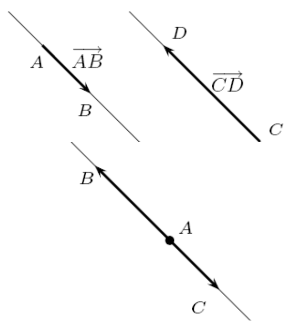
- par convention, le vecteur nul, $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur.
- Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si ils ont même direction.



Parallélisme et alignement :

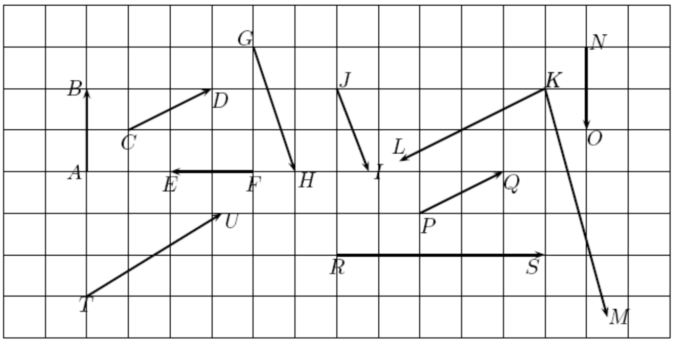
Soient A, B C et D quatre points du plan

- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.



V. Exercices

Exercice 1



Parmi les vecteurs ci-contre, préciser :

1. Ceux qui ont la même direction.
2. Ceux qui ont le même sens.
3. Ceux qui ont la même norme.

Y-a-t-il des vecteurs égaux ? Opposés ?

Exercice 2

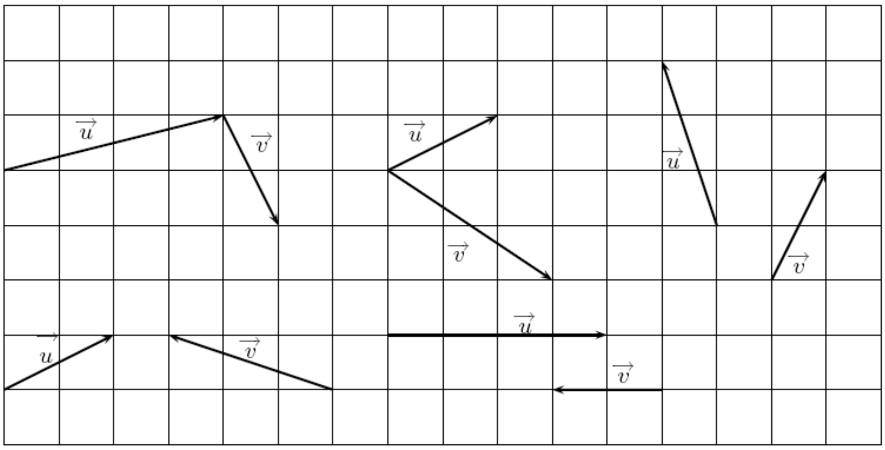
Soit $ABCD$ un parallélogramme. Construire les points E et F tels que $DCFE$ soit un parallélogramme avec E et F non situés sur la droite (AB). Montrer que $ABFE$ est un parallélogramme.

Exercice 3

Soit $ABCD$ un parallélogramme et E le point tel que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CE}$. Montrer que les segments $[AE]$ et $[CD]$ ont même milieu.

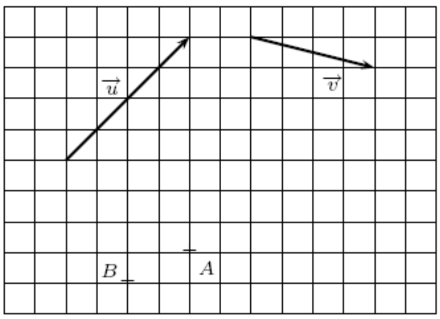
Exercice 4

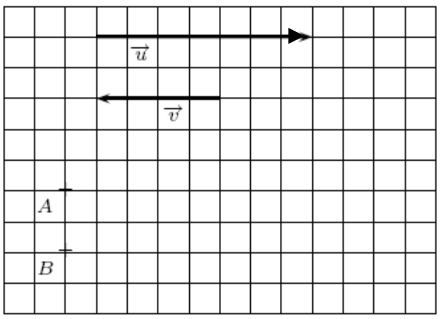
Dans chacun des cas suivants, tracer en rouge un vecteur $\vec{a}$ et en vert un vecteur $\vec{b}$ tels que :
$\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{b} = \vec{u} - \vec{v}$

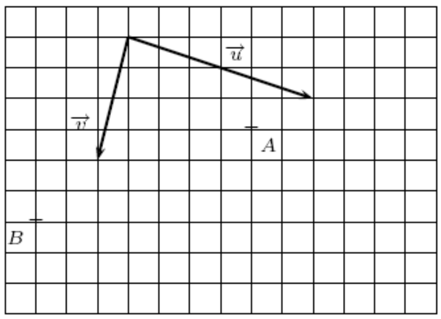


Exercice 5

Pour chacune des figures ci-dessous, construire le point M et le point N tels que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{BN} = \vec{u} - \vec{v}$.







Exercice 6

Soient A, B et C trois points non alignés du plan et E un autre point du plan. Placer les points D, F, G, H et I tels que :

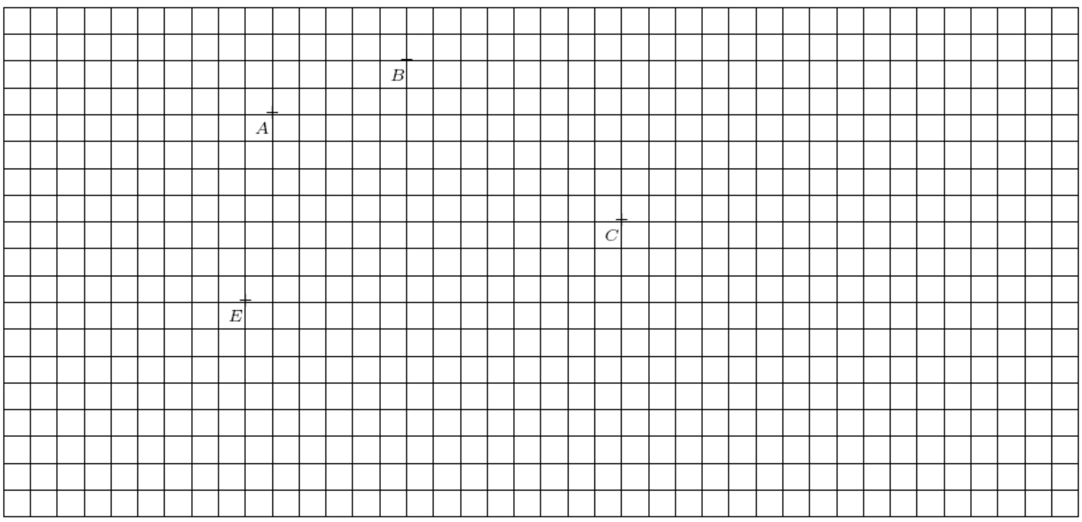
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{IF} = - \overrightarrow{BA}$



Exercice 7

A l'aide de la relation de Chasles, simplifier les sommes vectorielles suivantes :

$\vec{u} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ $\qquad$ $\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AF}$ $\qquad$ $\vec{r} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NP} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BC}$

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}$ $\qquad$ $\vec{t} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$

Exercice 8

En utilisant la relation de Chasles, compléter les égalités suivantes :

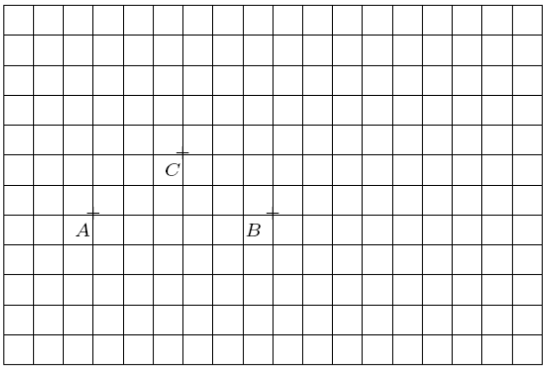
$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{B\ldots}$ $\qquad$ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{\ldots P} + \overrightarrow{\ldots\ldots}$ $\qquad$ $\overrightarrow{H\ldots} = \overrightarrow{\ldots\ldots} + \overrightarrow{IJ}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\ldots C} + \overrightarrow{\ldots D} + \overrightarrow{\ldots\ldots}$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{\ldots A} + \overrightarrow{A\ldots}$ $\qquad$ $\overrightarrow{\ldots E} = \overrightarrow{F\ldots} + \overrightarrow{G\ldots}$ $\qquad$ $\overrightarrow{A\ldots} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{\ldots M}$

Exercice 9

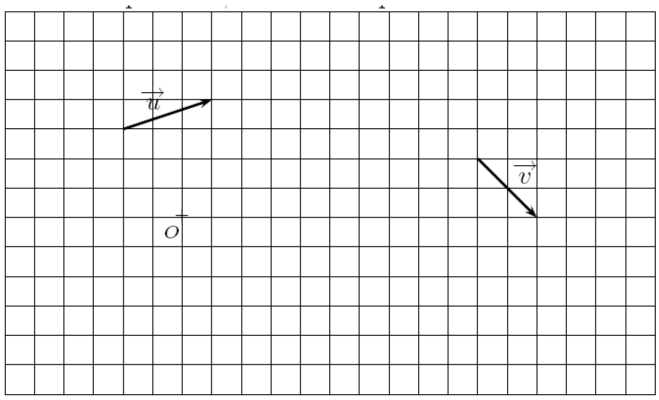
Sur le schéma ci-dessous, construire les points D, E, F et G tels que : $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BE} = -2\,\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FD}$



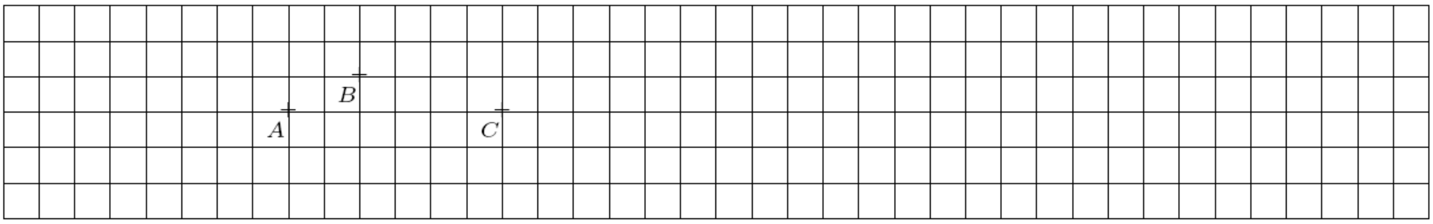
Exercice 10

Sur le schéma ci-dessous, construire les points A, B et C tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$, $\overrightarrow{OB} = 2\,\vec{u} - \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = -\vec{u} + 2\,\vec{v}$



Exercice 11

Sur le schéma ci-dessous, construire les points D et E tels que $\overrightarrow{AD} = 3\,\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



Exercice 12

Réduire les sommes vectorielles : $\vec{a} = 2(4\,\vec{u} - 5\,\vec{v}) - 3(2\,\vec{u} - 4\,\vec{v})$ $\qquad$ $\vec{b} = \frac{3}{2}(2\,\vec{u} - 5\,\vec{v}) - 7\left(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{5}{2}\vec{v}\right)$

Exercice 13

Soit ABC un triangle.

Soit D et E les points tels que $\overrightarrow{AD} = 3\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE} = 3\,\overrightarrow{BA}$.

Faire une figure.

1. Montrer que $\overrightarrow{CD} = 3\,\overrightarrow{AB}$
2. En déduire que C est le milieu de $[DE]$

Exercice 14

Soient A, B et C trois points du plan tels que : $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{CB}\right)$. Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 15

Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que : $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(5\,\overrightarrow{AC} + 3\,\overrightarrow{CB}\right)$. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 16

Soient $ABCD$ un parallélogramme et soient M et N les points tels que $\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Le but est de montrer que les points M, N et C sont alignés.

1. Montrer à l'aide de la relation de Chasles que $\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. (on dit que l'on a exprimé $\overrightarrow{CN}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$)

2. Montrer à l'aide de la relation de Chasles que $\overrightarrow{CM} = 2\,\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$. (on a exprimé $\overrightarrow{CM}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$)

3.
   (a) Montrer alors que $\overrightarrow{CM} = -2\,\overrightarrow{CN}$
   (b) Conclure.

Exercice 17

Soit ABC un triangle, D le milieu de $[AC]$, E le symétrique de B par rapport à C et F le point tel que $\overrightarrow{BF} = 2\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Lez but est de montrer que les droites (EF) et (BD) sont parallèles.

1. Montrer à l'aide de la relation de Chasles que $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{BD}$.

2. Montrer à l'aide de la relation de Chasles que $\overrightarrow{EF} = 2\,\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{BC}$.

3.
   (a) Montrer alors que $\overrightarrow{EF} = -4\,\overrightarrow{BD}$
   (b) Conclure.